جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات	امتحانات الفصل الأول ٢٠١٥-٢٠١٦ أسئلة مقرر التحليل التابعي (٢) لطلاب السنة الرابعة تحليل رياضي	المدة : ساعة ونصف العلامة:(١٠٠) درجة الاسم :

السؤال الأول (١٠+١٠ = ٢٠ درجة):

١)- اثبت أن كل مؤثر خطي و متراص هو مؤثر محدود .

٢)- ليكن A مؤثر خطي ومحدود من فضاء هيلبرت H في نفسه اثبت أن :

المؤثر A متراص ⟺ مرافقه A^* متراص .

السؤال الثاني (١٠+١٠=٢٠ درجة):

أ)- ليكن A مؤثر من $L(B,B)$، اثبت إذا كان $\|A\|<1$ فإن المؤثر $(I-A)^{-1}$ موجوداً في $L(B,B)$، وأن $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n$. ثم استنتج أنه إذا كان $|\lambda|>\|A\|$ عندئذ يكون $(A-\lambda I)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$.

ب)- اثبت أنه إذا كان $N(A)<\infty$ عندئذ يكون المؤثر A متراصاً . ($N(A)$ نظيم هيلبرت- شميدت للمؤثر A) .

السؤال الثالث (٢٠ درجة) :

إذا كان $A:X\to X$ مؤثر متراص حيث X فضاء خطي منظم اثبت عندئذٍ أنه من أجل كل قيمة $\lambda\neq 0$ يوجد m بحيث يكون $X=N(A-\lambda I)^m\oplus R(A-\lambda I)^m$.

السؤال الرابع (٢٠ درجة):

أوجد القيم الخاصة والعناصر الخاصة للمؤثر : $A:\ell_2\to\ell_2$ حيث :

$$Ax=(\xi_1,\xi_2,0,0,.....)\ \ ;\ x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)\in\ell_2$$

ثم بين فيما إذا كان المؤثر A متراص أو مؤثر إسقاط أو مؤثر موجباً .

السؤال الخامس (٢٠ درجة) : عرف شكل ثنائي الخطية المحدود ، ثم بيّن أن العلاقة :

$$F(x,y)=\langle Ax,y\rangle\ ,\forall x,y\in H$$

(حيث H فضاء هيلبرت العقدي و $A\in L(H)$) تعرف شكلاً ثنائي الخطية محدوداً ، ثم أوجد نظيمه .

انتهت الأسئلة

حمص ١٩/ ١ / ٢٠١٦ م.	مع التمنيات بالنجاح والتوفيق	مدرس المقرر الدكتور سامح العرجه

$$(I-A)S_N=(I-A)(I+A+A^2+A^3+...+A^N)=$$
$$=(I+A+A^2+A^3+...+A^N)-(A+A^2+A^3+...+A^{N+1})=I-A^{N+1}$$

كما أن :

2

$$S_N(I-A)=(I+A+A^2+A^3+...+A^N)(I-A)=$$
$$=(I+A+A^2+A^3+...+A^N)-(A+A^2+A^3+...+A^{N+1})=I-A^{N+1}$$

وبالتالي : $S_N(I-A)=I-A^{N+1}=(I-A)S_N$

بأخذ النهايات نجد أن :

$$\lim_{N\to\infty}S_N(I-A)=I-\lim_{N\to\infty}A^{N+1}=(I-A)\lim_{N\to\infty}S_N$$

2

وبما أن $\lim_{N\to\infty}\|A^{N+1}\|\leq\lim_{N\to\infty}\|A\|^{N+1}\overset{\|A\|<1}{=}0$ وبالتالي $\lim_{N\to\infty}A^{N+1}=0$ نعوض فيما سبق بالأخذ بعين الاعتبار أن $S=\lim_{N\to\infty}S_N$ نجد أن : $S(I-A)=I=(I-A)S$

وبالتالي $S=(I-A)^{-1}$ أي أن $(I-A)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n=I+A+A^2+A^3+...$.

2

بأخذ $T=\frac{1}{\lambda}A$ فنجد أن $\|T\|<1$ بالاستفادة مما سبق ونطبق ذلك على T فيكون :

$$(A-\lambda I)^{-1}=\left[(-\lambda)(I-\frac{1}{\lambda}A)\right]^{-1}=(-\lambda)^{-1}(I-\frac{1}{\lambda}A)^{-1}=$$

2

$$=-\frac{1}{\lambda}(I-T)^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}T^n=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n=-\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

ب)- لتكن $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة في H ولدينا دائماً $N(A)=N(A^*)$ وبالتالي :

$$N(A)=N(A^*)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|A^*h_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$$

2

فإذا كان $\varepsilon>0$ فيوجد $n_0=n_0(\varepsilon)>0$ بحيث : $\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\|A^*h_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon^2$

2

لنأخذ المؤثر $A_\varepsilon:H\to H:A_\varepsilon x=\sum_{k=1}^{n_0}\langle Ax,h_k\rangle h_k$ طالما المجموع منتهٍ فإن المؤثر A_ε متراص فمن أجل أي عنصر $x\in H$ يكون :

$$\|Ax - A_\varepsilon x\|^2 = \left\| \sum_{k=n_0+1}^{m} \langle Ax, h_k \rangle h_k \right\|^2 = \sum_{k=n_0+1}^{m} |\langle Ax, h_k \rangle|^2 =$$

$$\sum_{k=n_0+1}^{m} |\langle x, A^* h_k \rangle|^2 \le \sum_{k=n_0+1}^{m} \|x\|^2 \|A^* h_k\|^2 \le \varepsilon^2 \|x\|^2$$

وبالتالي :

$$\|Ax - A_\varepsilon x\|^2 < \varepsilon \|x\|$$

أي أن المؤثر متقارب من متتالية من المؤثرات المتراصة فهو متراص .

جواب السؤال الثالث (٢٠ درجة):

١)- لنرمز $R_m = R(A-\lambda I)^m$, $N_m = N(A-\lambda I)^m$ وليكن $x \in X$ عنصراً اختيارياً

فإن العنصر $z = (A-\lambda I)^m x \in R_m = R_{2m}$ وبالتالي $z \in R_{2m}$ أي يوجد $x_1 \in X$ بحيث

$z = (A-\lambda I)^{2m} x_1$ ولنأخذ $x_0 = (A-\lambda I)^m x_1 \in R_m$ ويكون عندئذ :

$$(A-\lambda I)^m x_0 = (A-\lambda I)^{2m} x_1 = z = (A-\lambda I)^m x$$

وبالتالي $(A-\lambda I)^m (x - x_0) = 0$ وهذا يعني أن $x - x_0 \in N_m$ وبالتالي :

$$x_0 \in R_m \quad , \quad x - x_0 \in N_m \quad , \quad x = x - x_0 + x_0$$

بقي أن نثبت أن هذا التمثيل وحيد :

نفرض وجود تمثيل آخر $u_0 \in R_m$, $x - u_0 \in N_m$, $x = x - u_0 + u_0$ وبالتالي

$v_0 = x_0 - u_0 \in R_m$ وبالتالي $v \in X$, $v_0 = (A-\lambda I)^m v$ كما أن

$$v_0 = x_0 - u_0 = (x - u_0) - (x - x_0) \Rightarrow v_0 \in N_m$$

$$(A-\lambda I)^m v_0 = 0 \Rightarrow (A-\lambda I)^{2m} v = (A-\lambda I)^m v_0 = 0$$

وبالتالي $v \in N_{2m} = N_m$ وبالتالي $v_0 = (A-\lambda I)^m v = 0$ ومنه $x_0 = u_0$ فالتمثيل وحيد .

إذاً $X = N(A-\lambda I)^m \oplus R(A-\lambda I)^m$ وهو المطلوب .

سلم تصحيح مادة الفيزياء للرياضيات
الدورة الصيفية ٢٠١٦

جواب السؤال الرابع (٢٠ درجة): $A:\ell_2\to\ell_2$ حيث :

$$A\,x=(\xi_1,\xi_2,0,0,.....)\quad ;\ x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)\in\ell_2$$

نحل المعادلة $A\,x=x$ فنجد : $(\xi_1,\xi_2,0,0,.....)=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\lambda\xi_3,...)$ 2

وبالتالي : $\xi_1=\lambda\xi_1\ ,\ \xi_2=\lambda\xi_2\ ,\ \lambda\xi_3=\lambda\xi_4=...=0$ ومنه نجد أن :

$\lambda=0\ \&\ \lambda=1$ قيمتين خاصتين للمؤثر A. 2

ويكون العنصر الخاص الموافق لـ $\lambda=0$ هو $x_0=(0,0,\xi_3,\xi_4,...)$ 2

ويكون العنصر الخاص الموافق لـ $\lambda=1$ هو $x_1=(\xi_1,\xi_2,0,0,...)$. 2

بما أن المؤثر A منته الأبعاد حيث $\dim R(A)=2$ فإن المؤثر A متراص . 2

- كي يكون المؤثر مؤثر إسقاط يجب أن يحقق $A^*=A\ \ \&\ \ A^2=A$.

لنبين فيما إذا كان $A^*=A$ أي مترافق ذاتياً . حسب تعريف A^* لدينا : 2

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle\qquad(1)$$

نفرض أن

$$A^*y=(z_1,z_2,z_3,...)\quad ;\ y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,...)\in\ell_2\ \&\ x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)\in\ell_2$$

حسب(١) يكون $\sum_{n=1}^{\infty}(Ax)_n\,\overline{\eta_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\,\overline{z}$ ومنه نجد :

$$z_1=\eta_1\ ,\ z_2=\eta_2\ ,\ z_3=z_4=...=0$$
$$A^*y=(\eta_1,\eta_2,0,0,...)\quad ,\ \forall y=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,...)\in\ell_2$$
2

أي أن $A^*=A$ أي مترافق ذاتياً . كما أن

$$A^2x=A(A\,x)=A(\xi_1,\xi_2,0,0,.....)=(\xi_1,\xi_2,0,0,.....)=A\,x$$
$$A^2x=Ax\quad ;\ x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)\in\ell_2\ \Rightarrow A^2=A$$
2

مما سبق ينتج تحقق شروط مؤثر الإسقاط أي المؤثر مؤثر إسقاط .

كي يكون مؤثر موجباً يجب تحقق $\langle Ax,x\rangle\ge 0$.لدينا 2

$$\langle Ax,x\rangle=\langle(\xi_1,\xi_2,0,0,.....),(\xi_1,\xi_2,\xi_3,...)\rangle_{\ell_2}=\xi_1\overline{\xi_1}+\xi_2\overline{\xi_2}+0+0+....$$
$$=|\xi_1|^2+|\xi_2|^2\ \ge 0$$
2

الدورة الصيفية ٢٠١٦ — مرتضى مادة الفيزياء والرياضيات

أي أن المؤثر مؤثر موجباً أيضاً .

جواب السؤال الخامس (٢٠ درجة) :

تعريف (الشكل ثنائي الخطية) : ليكن $L : H \times H \to C : (x, y) \mapsto L(x, y)$ ندعو L شكلاً ثنائيّ الخطية إذا كان من أجل أي $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ وأي $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in H$ يتحقق الشرطان :

5

1. $L(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 L(x_1, y) + \lambda_2 L(x_2, y)$.
2. $L(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \overline{\mu_1} L(x, y_1) + \overline{\mu_2} L(x, y_2)$.

3

تعريف (المحدودية) : نقول عن شكل ثنائي الخطية L أنه محدود إذا وجد عدد $c > 0$ بحيث يكون $|L(x, y)| \le c\|x\|\|y\|$.

نتحقق من شرطي شكل ثنائي الخطية من أجل $F(x, y)$: ليكن $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in H$ وليكن $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in H$

(1

3

$$F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \langle A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), y\rangle = \langle \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2), y\rangle =$$
$$\lambda_1 \langle A(x_1), y\rangle + \lambda_2 \langle A(x_2), y\rangle = \lambda_1 F(x_1, y) + \lambda_2 F(x_2, y)$$

فالشرط الأول محقق .

(2

3

$$F(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \langle Ax, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2\rangle = \overline{\mu_1}\langle Ax, y_1\rangle + \overline{\mu_2}\langle Ax, y_2\rangle =$$
$$= \overline{\mu_1} F(x, y_1) + \overline{\mu_2} F(x, y_2)$$

إذن الشكل السابق شكل ثنائي الخطية ، وهو محدود لأن

3

$$|F(x, y)| = |\langle Ax, y\rangle| \le \|Ax\|\|y\| \le \|A\|\|y\|\|x\|$$

3

ونظيمه $\|F\| = \|A\|$.

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

الدكتور سامح العرجه

حمص ١٩ / ١ / ٢٠١٦ م.